

*Giancarlo Buccella*

*Problemi di Elettromagnetismo*



*Tutti i problemi non risolti nel testo*

*"Elettromagnetismo"*

*Joseph A. Edminister*

*(n. 48 collana Schaum's -1994-)*

*Giancarlo Buccella*

*Problemi di  
Elettromagnetismo*

*Tutti i problemi non risolti nel testo*

*"Elettromagnetismo"*

*Joseph A. Edminister*

*Collana Schaum's (1994)*

*“L'uomo incontra Dio dietro ogni porta che la scienza riesce ad aprire.”*

Albert Einstein

*“La fisica è come il sesso: non c'è dubbio che facendola  
si ottengano dei risultati pratici,  
ma non è per quello che la si fa.”*

Richard Feynman

*“Uno degli strumenti più importanti della fisica  
è il cestino della carta straccia.”*

Richard Feynman

*Fare scienza è un modo di “amare Dio con tutto il cuore,  
con tutta l'anima e con tutta la mente.*

Francis Collins

### Decalogo per la risoluzione dei problemi di Fisica

- 1) Leggere attentamente il testo del problema.
- 2) Preparare un elenco completo delle quantità date (note) e di quelle cercate (incognite).
- 3) Disegnare uno schema o un diagramma accurato della situazione. Nei problemi di dinamica, assicurarsi di aver disegnato tutte le forze che agiscono su un dato corpo (diagramma di corpo libero).
- 4) Dopo aver deciso quali condizioni e principi fisici utilizzare, esaminare le relazioni matematiche che sono valide nelle condizioni date. Assicurarsi sempre che tali relazioni siano applicabili al caso in esame. È molto importante sapere quali sono le limitazioni di validità di ogni relazione o formula.
- 5) Molte volte le incognite sembrano troppe rispetto al numero di equazioni. In tal caso è bene chiedersi, ad esempio:
  - a) esistono altre relazioni matematiche ricavabili dalle condizioni del problema?
  - b) è possibile combinare alcune equazioni per eliminare alcune incognite?
- 6) È buona norma risolvere i problemi in modo simbolico e sostituire i valori numerici soltanto alla fine. Conviene anche mantenere traccia delle unità di misura, poiché questo può servire come controllo.
- 7) Controllare se la soluzione trovata è dimensionalmente corretta.
- 8) Arrotondare il risultato finale allo stesso numero di cifre significative di quello dei dati del problema, tenendo presente comunque che, qualora i dati siano espressi con precisione diversa, il risultato finale non potrà essere più preciso del dato meno preciso.
- 9) Ricordare che per imparare a risolvere bene i problemi è necessario risolverne tanti: la risoluzione dei problemi spesso richiede creatività, ma qualche volta (spesso) si riuscirà a risolvere un problema prendendo lo spunto dal percorso risolutivo di problemi analoghi già svolti.
- 10) Se infine non si riesce ad “imbrocicare” la strada giusta: consultare un qualche testo di esercizi svolti (come quello che avete tra le mani!).

Un ultimo suggerimento: consiglio di usare questi esercizi svolti con atteggiamento “attivo” ed in modo “ragionato”, capitolo dopo capitolo parallelamente allo studio del libro di testo. Se con i propri mezzi, dopo un tempo ragionevole, non si è giunti a un qualche risultato positivo si può senz'altro passare alla consultazione di questo testo. Questo non toglie nulla al proprio percorso formativo se non frustrazioni e perdite di tempo. In nessuna espressione della vita ci si può illudere di poter affrontare una prova impegnativa con qualche probabilità di successo, senza un adeguato addestramento pratico. Il tentativo di risolvere un problema di fisica non sfugge a questa regola: le prove scritte degli esami di fisica, in tutte le università, ne danno una dimostrazione inconfutabile.

Il riuscire ad “imbroccare” e poi eventualmente risolvere dettagliatamente un problema di fisica, (magari provando e riprovando, "rimurginandoci" sopra se occorre anche intere giornate) è una soddisfazione intellettuale che solo chi l'ha provato può capire.

Auguro a chi userà questi esercizi di provare tale gioia.

Alanno – febbraio 2022

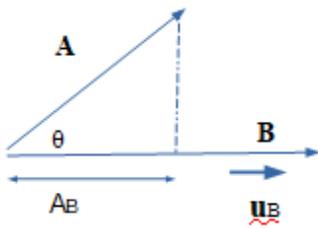
# Indice

Cap. 1	Analisi Vettoriale	pag. 1
Cap. 2	Forze di Coulomb	pag. 33
Cap. 3	Flusso elettrico e legge di Gauss	pag. 96
Cap. 4	Divergenza e teorema della divergenza	pag. 114
Cap. 5	Energia e potenziale elettrico	pag. 131
Cap. 6	Corrente, densità di corrente e conduttori	pag. 165
Cap. 7	Capacità e materiali dielettrici	pag. 183
Cap. 8	Equazione di Laplace	pag. 210
Cap. 9	La legge di Ampère e il campo magnetico	pag. 228
Cap. 10	Forze e momenti nei campi magnetici	pag. 250
Cap. 11	Induttanza e circuiti magnetici	pag. 275
Cap. 12	Corrente di spostamento e fem indotta	pag. 291
Cap. 13	Equazioni di Maxwell e condizioni al contorno	pag. 307
Cap. 14	Onde elettromagnetiche	pag. 316

# Cap. 1

## Analisi vettoriale

1.18) Dati  $A = 4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}$  e  $B = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ , trovare la proiezione di  $A$  su  $B$ .



Proiezione di  $A$  su  $B$  :

$$\begin{aligned} A_B &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_B = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} / |\mathbf{B}|) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) / |\mathbf{B}| = \\ &= [(4\mathbf{j} + 10\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})] / (2^2 + 3^2)^{1/2} = 12 / \sqrt{13} \end{aligned}$$

1.19) Dati  $A = (10/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{k})$  e  $B = 3(\mathbf{j} + \mathbf{k})$ , esprimere la proiezione di  $B$  su  $A$ , in forma di vettore diretto come  $A$ .

$$\begin{aligned} \text{proiezione di } \mathbf{B} \text{ su } \mathbf{A} &\equiv \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}_A = \mathbf{B} \cdot \frac{\mathbf{A}}{A} = (3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \frac{(10/\sqrt{2})\mathbf{i} + (10/\sqrt{2})\mathbf{k}}{(100/2 + 100/2)^{1/2}} = \\ &= (3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) \cdot \left( \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Dove si è indicato con  $\mathbf{u}_A$  il versore di  $A$ .

La proiezione scalare di  $B$  su  $A$  è evidentemente un numero, per renderlo un vettore proiezione di  $B$  su  $A$  diretto come  $A$  occorrerà moltiplicarlo per il versore di  $A$ .

Avendosi:

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \mathbf{u}_A = \frac{3}{\sqrt{2}} \left( \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{3}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

1.20) Trovare l'angolo compreso tra  $\mathbf{A} = 10\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  e  $\mathbf{B} = -4\mathbf{j} + 0.5\mathbf{k}$ , usando sia il prodotto scalare sia il prodotto vettoriale.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta \quad (\text{dove } \theta \text{ è l'angolo convesso fra i due vettori})$$

$$\theta = \arccos (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) / AB = \arccos (-40+1)/41.07 = \arccos (-39)/41.7 = 161.7^\circ$$

$$\text{essendo: } A = (100+4)^{1/2} = 10.2 ; \quad B = (16+0.25)^{1/2} = 4.03 \quad AB = 41.07$$

Ricavando l'angolo dal prodotto vettore si ha:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta$$

$$\theta = \arcsin |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| / AB = \arcsin 13/41.07 = 18.5^\circ$$

$$\text{essendo } |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 13$$

Questo è l'angolo supplementare di  $161.7^\circ$ .

Nota: a rigore per determinare l'angolo fra due vettori si dovrebbe procedere usando il prodotto scalare, essendo unamodalità che ci restituisce una risposta univoca, infatti:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta; \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{AB}$$

dove  $\theta$  è l'angolo convesso formato dai due vettori :

$$\text{se } A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \geq 0, \quad \Rightarrow \quad \cos \theta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \theta \leq 90^\circ$$

$$\text{se } A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \leq 0, \quad \Rightarrow \quad \cos \theta \leq 0 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

D'altronde dalla definizione di prodotto vettore

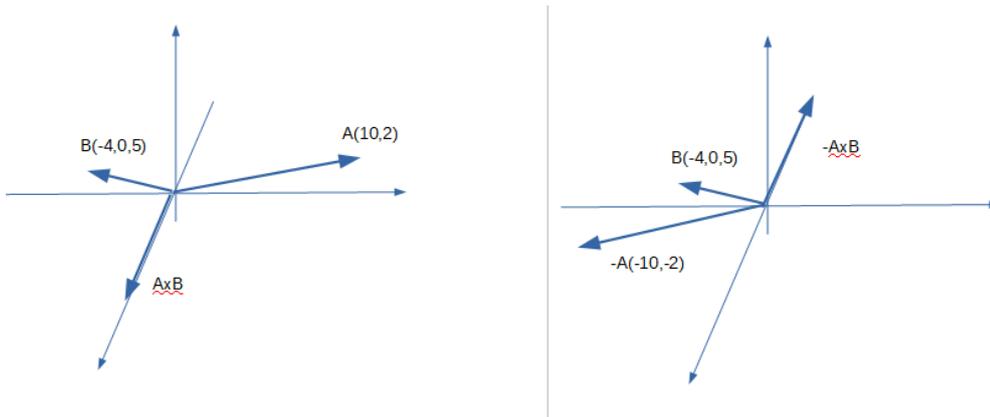
$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB \sin \theta; \quad \sin \theta = \frac{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|}{AB} \geq 0$$

essendo  $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$  non è possibile discriminare l'angolo convesso dal suo supplementare.

Occorrerà dunque necessariamente ricorrere ad una rappresentazione grafica dei vettori.

Infatti disegnando i due vettori  $(-\mathbf{A}) \times \mathbf{B}$  vediamo che essi formano un angolo di  $18.5^\circ$

pur avendo ovviamente lo stesso modulo di  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Quindi sarà il verso del prodotto vettore a dirci quale dei due angoli è quello corretto.



1.21) Trovare l'angolo compreso tra  $\mathbf{A} = 5.8\mathbf{j} + 1.55\mathbf{k}$  e  $\mathbf{B} = -6.93\mathbf{j} + 4.0\mathbf{k}$ , usando sia il prodotto scalare sia il prodotto vettoriale.

$$A = (5.8^2 + 1.55^2)^{1/2} = 6$$

$$B = (-6.93^2 + 4^2)^{1/2} = 8$$

$$AB = 48$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = -40.194 + 6.2 = -33.994$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \mathbf{i} + (A_x B_z + A_z B_x) \mathbf{j} + (A_x B_y + A_y B_x) \mathbf{k} = \\ &= (5 \cdot 4 - 1.55 \cdot (-6.93)) \mathbf{i} = (23.2 + 10.74) \mathbf{i} = 33.945 \mathbf{i} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = 33.945$$

$$\theta = \arccos(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} / AB) = \arccos(-33.994/48) = 135^\circ$$

$$\theta = \arcsin(|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| / AB) = \arcsin(33.945/48) = 45^\circ = (180^\circ - 135^\circ)$$

1.22) Dato il piano  $4x + 3y + 2z = 12$ , trovare il versore ad esso normale che si allontana dall'origine.

E' sufficiente ricordare che, considerando un piano nello spazio nella sua espressione cartesiana  $Ax + By + Cz + D = 0$  il suo versore è dato dalla seguente formula

$$\mathbf{v} = \pm \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

## Appendice Cap.1

### 1. Calcolo delle trasformazioni dei versori facendo uso di considerazioni geometriche

Per calcolare come si trasformano i versori da un sistema di coordinate (sferiche nel nostro caso) ad un altro (cartesiano nel nostro caso) occorre calcolare le sue proiezioni sugli assi.

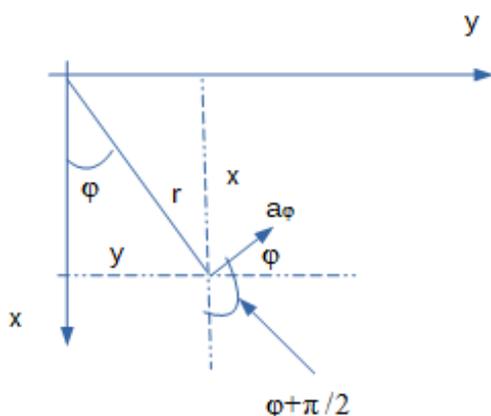
proiezioni di  $\mathbf{a}_\varphi$  sugli assi x, y e z.

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}_\varphi = -\sin \varphi \quad (\text{a})$$

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}_\varphi = \cos \varphi \quad (\text{b})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_\varphi = 0 \quad (\text{c})$$

Da cui si vede che  $\mathbf{a}_\varphi$  è sempre perpendicolare a  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{a}_\varphi$  giace su un piano  $z = \text{cost.}$ , quindi non ha componenti lungo l'asse z).



dal disegno si nota che

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\cos \varphi = x/r = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\sin \varphi = y/r = y/(x^2 + y^2)^{1/2}$$

Quindi la (a), (b) e (c) (che ci dice come si trasforma  $\mathbf{a}_\varphi$  in un sistema di assi cartesiani), diventa

componente x:  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}_\varphi = -\sin \varphi = -y/(x^2 + y^2)^{1/2}$

componente y:  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}_\varphi = \cos \varphi = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$

componente z:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_\varphi = 0$

Ritrovando così la terza relazione della (1) del prob. 1.46.

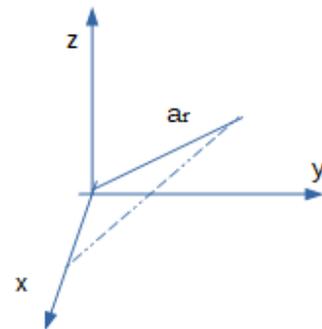
Vediamo ora come si trasforma  $\mathbf{a}_r$ .

Andiamo a considerare la proiezione del punto finale del vettore posizione  $\mathbf{a}_r$  (che parte dall'origine) sull'asse x. Come si vede dal disegno seguente si dovrà considerare il triangolo rettangolo di cateto  $\mathbf{i}$  e ipotenusa  $\mathbf{a}_r$ .

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}_r = \cos(\text{dell'angolo fra } \mathbf{i} \text{ e } \mathbf{a}_r) = x/r = \sin \theta \cos \varphi$

$\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}_r = y/r = \sin \theta \sin \varphi$

$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta$  (basta considerare cosa è l'angolo  $\theta$ )



componente x:  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}_r = \cos(\text{dell'angolo fra } \mathbf{i} \text{ e } \mathbf{a}_r) = x/r = \sin \theta \cos \varphi$

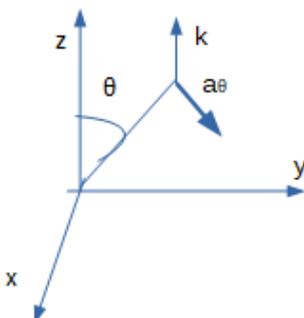
componente y:  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}_r = y/r = \sin \theta \sin \varphi$

componente z:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_r = \cos \theta$  (basta considerare cosa rappresenta l'angolo  $\theta$ )

Ritrovando così la prima relazione della (1) del prob. 1.46.

Infine vediamo come si trasforma  $\mathbf{a}_\theta$ .

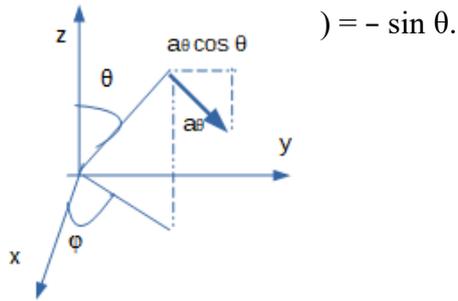
Partiamo dal disegno.



L'angolo fra  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{a}_\theta$  è  $\pi/2 + \theta$

La proiezione sull'asse x è un

Disegniamo la situazione:



Non è possibile fare direttamente  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}_\theta$  in quanto non conosciamo l'angolo fra  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{a}_\theta$ , allora calcoliamo prima la proiezione di  $\mathbf{a}_\theta$  lungo la direzione y, avendosi  $a_\theta \cos \theta$  e successivamente la proiezione di  $a_\theta \cos \theta$  lungo l'asse x avendosi  $a_\theta \cos \theta \cos \varphi$ .

In definitiva si ha:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi.$$

Con analoga considerazione per l'asse y e z si ha:

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta \sin \varphi$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin \theta$$

componente x:  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi$

componente y:  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{a}_\theta = \cos \theta \sin \varphi$

componente z:  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_\theta = -\sin \theta$

Ritrovando così la seconda relazione della (1) del prob. 1.46.

Riassumendo:

$$\mathbf{a}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}$$

$$\mathbf{a}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j}$$

con le sue inverse:

$$\mathbf{i} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{a}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{a}_\theta - \sin \varphi \mathbf{a}_\varphi$$

$$\mathbf{j} = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{a}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{a}_\theta + \cos \varphi \mathbf{a}_\varphi$$

$$\mathbf{k} = \cos \theta \mathbf{a}_r - \sin \theta \mathbf{a}_\theta$$

## 2. Approccio teorico al calcolo delle trasformazioni dei vettori

Un sistema di coordinate curvilinee  $(u_1, u_2, u_3)$  nello spazio  $\mathbb{R}^3$  è definito, con riferimento ad un sistema cartesiano, da 3 funzioni scalari del tipo

$$u_1 = u_1(x, y, z)$$

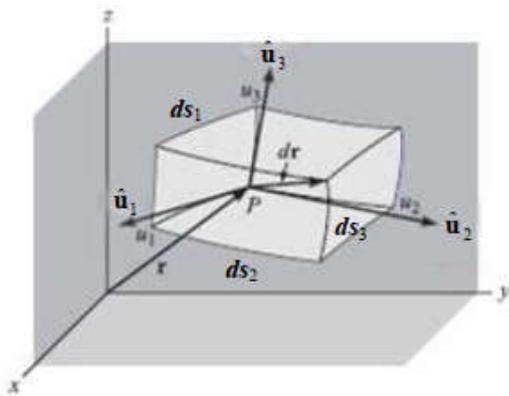
$$u_2 = u_2(x, y, z)$$

$$u_3 = u_3(x, y, z)$$

che in forma vettoriale diventa  $\mathbf{u}: (x, y, z) \longrightarrow (u_1, u_2, u_3)$

Questa relazione costituisce un *cambiamento di coordinate*.

Ecco visivamente come si presenta un generico sistema di coordinate curvilineo.



Chiameremo superfici coordinate le superfici di equazioni

$$u_1(x, y, z) = c_1$$

$$u_2(x, y, z) = c_2$$

$$u_3(x, y, z) = c_3$$

dove  $c_1, c_2$  e  $c_3$  sono delle costanti arbitrarie.

Si osservi che su una superficie coordinata variano solo 2 coordinate. Ad esempio, sulla superficie coordinata  $u_2 = c_2$  variano solo le coordinate  $u_1$  e  $u_3$  mentre  $u_2$  è fissata.

Chiameremo linee coordinate le 3 linee che si ottengono intersecando a due a due le 3 superfici coordinate. Lungo tali linee varia solo una coordinata. Ad esempio, la linea coordinata associata alla

## Cap. 2

Forze di Coulomb e intensità del campo elettrico

Nota introduttiva: tutte le grandezze fisiche ove non esplicitate si intendono espresse nel SI.

2.25) Due cariche puntiformi  $q_1 = 250 \mu\text{C}$  e  $q_2 = -300 \mu\text{C}$  sono poste rispettivamente in  $(5, 0, 0)$  e  $(0, 0, -5)$ . Trovare la forza che agisce su  $q_2$ .

La forza che agisce su  $q_2$  è 
$$\mathbf{F}_{1,2} = k_e \frac{q_1 q_2}{R^2} \mathbf{a}_{1,2}$$

dove i pedici di  $\mathbf{F}$  (1,2) significa che ci stiamo riferendo alla forza che va da 1 a 2, cioè che *agisce su*  $q_2$  causata da  $q_1$  (potremo dire per facilitare la memorizzazione che il secondo pedice si riferisce alla particella “bersaglio”);

dove  $R$  è il modulo del vettore  $\mathbf{R}$  (che va da 1 a 2: il secondo pedice indica dove il vettore “punta”)

$$\mathbf{R}_{12} = (x_2 - x_1) \mathbf{i} + (y_2 - y_1) \mathbf{j} + (z_2 - z_1) \mathbf{k}$$

che esprime la distanza fra i punti  $A(x_1, y_1, z_1)$  e  $B(x_2, y_2, z_2)$  dove sono poste le due cariche  $q_1$  e  $q_2$ ,

e dove il versore  $\mathbf{a}_{12}$  è il versore che va da 1 a 2 (cioè dalla carica  $q_1$  a  $q_2$ ).

Calcoliamo il versore:

$$\mathbf{R}_{12} = (0 - 5) \mathbf{i} + (0 - 0) \mathbf{j} + (-5 - 0) \mathbf{k} = -5 \mathbf{i} - 5 \mathbf{k}$$

$$R_{12} = (5^2 + 5^2)^{1/2} = \sqrt{50}$$

$$\mathbf{a}_{12} = \mathbf{R}_{12}/R_{12} = (-5 \mathbf{i} - 5 \mathbf{k}) / \sqrt{50} = (1/\sqrt{2}) (-\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

Dunque

$$\mathbf{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} \mathbf{a}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2} \frac{\mathbf{R}_{12}}{R_{12}} = 9 \cdot 10^9 \frac{250 \cdot 10^{-6} \cdot (-300) \cdot 10^{-6}}{50} \frac{1}{\sqrt{2}} (-\mathbf{i} - \mathbf{k}) = 13.5 \left[ \frac{(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{\sqrt{2}} \right] N$$

$$\mathbf{F}_{12} = (9.5\mathbf{i} + 9.5\mathbf{k}) N$$

$$F_{12} = (9.5^2 + 9.5^2)^{1/2} = 13.4 N$$

Dove si è usata la costante  $k_e$  che useremo anche nel prosieguo.

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ m / F}$$

2.26) Due cariche puntiformi  $q_1 = 30 \mu\text{C}$  e  $q_2 = -100 \mu\text{C}$  sono poste rispettivamente in  $(2, 0, 5)$  e  $(-1, 0, -2)$ . Trovare la forza che agisce su  $q_1$ .

La forza che agisce su  $q_1$  è:

$$\mathbf{F}_1 = k_e (q_1 q_2 / R_{21}^2) \mathbf{a}_{21}$$

Calcoliamo il versore:

$$\mathbf{R}_{21} = (x_1 - x_2) \mathbf{i} + (y_1 - y_2) \mathbf{j} + (z_1 - z_2) \mathbf{k} = (2 - (-1)) \mathbf{i} + (0 - 0) \mathbf{j} + (5 - (-2)) \mathbf{k} = 3 \mathbf{i} + 7 \mathbf{k}$$

$$R_{21} = (3^2 + 7^2)^{1/2} = \sqrt{58}$$

$$\mathbf{a}_{21} = \mathbf{R}_{21} / R_{21} = (3 \mathbf{i} + 7 \mathbf{k}) / \sqrt{58}$$

Quindi:

$$\mathbf{F}_{21} = k_e \frac{q_1 q_2}{R_{21}^2} \mathbf{a}_{21} = 9 \cdot 10^9 \frac{30 \cdot 10^{-6} \cdot (-100) \cdot 10^{-6}}{58} \frac{1}{\sqrt{58}} (3\mathbf{i} + 7\mathbf{k}) = 0.465 \left[ \frac{(-3\mathbf{i} - 7\mathbf{k})}{\sqrt{58}} \right] N$$

$$\mathbf{F}_{21} = (0.18 \mathbf{i} + 0.43 \mathbf{k}) N$$

$$F_{12} = (0.18^2 + 0.43^2)^{1/2} = 0.466 N$$

2.27) Trovare nel prob. precedente la forza che agisce su  $q_2$ .

La forza  $\mathbf{F}_2$  che agisce su  $q_2$ , per il terzo principio della dinamica, è semplicemente  $-\mathbf{F}_1$ .

2.28) Quattro cariche puntiformi ognuna di  $20 \mu\text{C}$ , sono poste a  $\pm 4 \text{ m}$  sugli assi  $x$  e  $y$ . Trovare la forza che agirà su una su una carica puntiforme posta in  $A (0, 0, 3) \text{ m}$ .

Bisogna calcolare la forza a cui sarebbe soggetta una certa carica che venisse posta in  $A$ , cioè il campo elettrico in  $A$ .

Calcoliamo dapprima il campo in  $A$  prodotto da  $q_1$  posto in  $4 \mathbf{i}$ :

$$\mathbf{E}_1 = k_e \frac{q_1}{R_1^2} \mathbf{a}_1$$

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{R}_1}{R_1} = \frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}}{(4^2 + 3^2)^{1/2}} = \frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}}{5}$$

$$\mathbf{E}_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{20 \cdot 10^{-6}}{5^2} \frac{-4\mathbf{i} + 3\mathbf{k}}{5}$$

Il campo totale in A è dato solo dalla somma delle componenti z dei 4 campi, per ovvie ragioni di simmetria.

$$\mathbf{E}_{tot} = 4\mathbf{E}_{1,z} = 4 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{20 \cdot 10^{-6}}{5^2} \frac{3\mathbf{k}}{5} = 1.73 \cdot 10^4 \mathbf{k} \text{ (V / m)}$$

Se in A poniamo una carica q di 100  $\mu\text{C}$  la forza che essa risentirà sarà:

$$\mathbf{F}_{tot} = q\mathbf{E}_{1,z} = 100 \cdot 10^{-6} \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{20 \cdot 10^{-6}}{5^2} \frac{3\mathbf{k}}{5} = 1.73\mathbf{k} \text{ (N)}$$

2.29) Dieci cariche identiche, ciascuna di 500  $\mu\text{C}$ , sono tutte ad una stessa distanza disposte su una circonferenza di raggio 2 m. Trovare la forza che agirà su una carica di  $-20 \mu\text{C}$  posta sull'asse del cerchio a 2 m dal suo piano.

Le cariche sono disposte ogni  $36^\circ$  sulla circonferenza. Poiché per ragioni di simmetria sopravvivono solo le componenti z del campo, consideriamo il contributo di una sola carica, quella ad esempio posta sull'asse x.

$$\mathbf{E}_{1,z} = k_e \frac{q_1}{R_1^2} \mathbf{a}_1 = k_e \frac{q_1}{R_1^2} \frac{2\mathbf{k}}{\sqrt{2}} = 9 \cdot 10^9 \frac{500 \cdot 10^{-6}}{8} \frac{2\mathbf{k}}{\sqrt{8}} = 3.98 \cdot 10^5 \mathbf{k} \text{ (V / m)}$$

Il campo totale è:

$$\mathbf{E}_{tot} = 10 \mathbf{E}_{1,z} = 3.98 \cdot 10^6 \mathbf{k} \text{ V/m}$$

La forza su q è:

$$\mathbf{F}_q = q \mathbf{E}_{tot} = -20 \cdot 10^{-6} 3.98 \cdot 10^6 = -79.6 \mathbf{k} \text{ N}$$

2.30) Trovare che forza una carica puntiforme di  $q_0 = 500 \mu\text{C}$  posta nell'origine eserciterà su un'altra carica puntiforme  $q_1 = 50 \mu\text{C}$  in  $(0, 0, 5)$ . Confrontare la risposta con quelle ottenute per i prob. 2.4 e 2.5, nei quali la stessa carica complessiva era distribuita su di un disco circolare.

$$\mathbf{a}_{01} = \mathbf{R}_{01}/R_{01} = [(0-0)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (5-0)\mathbf{k}] / 5 = 5\mathbf{k} / 5 = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_1 = (k_e q_0 q_1 / R_{01}^2) \mathbf{a}_{01} = 28.26 \mathbf{k} \text{ (N)}$$

Se la stessa carica  $q_0$  è distribuita su di un disco con raggio 5 m la forza agente su  $q_1$  – come visto nel prob. 2.4 – è  $\mathbf{F}_1 = 16.56 \mathbf{k} \text{ (N)}$ . Se il disco è più piccolo, con raggio  $R = 2 \text{ m}$  si ha  $\mathbf{F}_1 = 25.27 \mathbf{k} \text{ (N)}$ , questo ci indica che man mano che il disco si restringe il valore della forza su  $q_1$  si avvicina al caso della carica puntiforme.

2.31) Trovare che forza agisce su una carica puntiforme di  $q_0 = 30 \mu\text{C}$  in  $(0, 0, 5)$  sotto l'azione di una carica di  $500 \mu\text{C}$ , distribuita uniformemente, su un quadrato di 4 m di lato, nel piano  $z = 0$ , compreso fra  $x = \pm 2 \text{ m}$  ed  $y = \pm 2 \text{ m}$ .

Utilizziamo dapprima, ai fini esercizio didattico, una schematizzazione semplificatrice, cioè supponiamo che anziché avere una distribuzione di carica  $Q$  “spalmata” su un quadrato lo sia su un cerchio di raggio  $R = 2 \text{ m}$  centrata nell'origine, in modo da utilizzare le coordinate cilindriche. Sia  $\mathbf{a}_1$  il versore che punta dall'elemento di area, avente carica  $dQ$ , del cerchio verso il punto ove è situata la carica puntiforme  $q$ .

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{-r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z}{(r^2 + 5^2)^{1/2}} \quad \text{la forza elementare su } q \text{ è: } d\mathbf{F} = k_e \frac{q dQ}{R^2} \mathbf{a}_1$$

dove  $dQ$  in coord. cilindriche è  $dQ = \rho r dr d\varphi$ ,

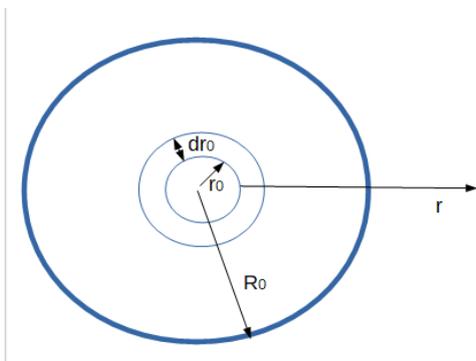
la densità superficiale di carica vale

$$\rho = Q/A = 500 \mu\text{C}/2^2 = 31.25 \cdot 10^{-6} \text{ C}^2/\text{m} \quad \text{allora:}$$

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= k_e \frac{q dQ}{R^2} \mathbf{a}_1 = 9 \cdot 10^9 \frac{30 \cdot 10^{-6} \cdot dQ}{r^2 + 25} \frac{-r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z}{(r^2 + 5^2)^{1/2}} = \frac{2.70 \cdot 10^5 \cdot \rho r dr d\varphi}{r^2 + 25} \frac{-r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z}{(r^2 + 5^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{2.70 \cdot 10^5 \cdot 31.25 \cdot 10^{-6} r dr d\varphi}{r^2 + 25} \frac{-r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z}{(r^2 + 5^2)^{1/2}} = \frac{8.44 r dr d\varphi}{r^2 + 25} \frac{-r\mathbf{a}_r + 5\mathbf{a}_z}{(r^2 + 5^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

Problema complementare n. 1

Si consideri una sfera, con una distribuzione uniforme di cariche positive, di raggio  $R_0$  e di carica  $Q$ , come mostrato in figura. (a) Si determini il campo elettrico in funzione della distanza dal centro, sia per  $r < R_0$  che per  $r > R_0$ . (b) Si determini nello stesso modo anche il potenziale elettrico, ponendo  $V(r)=0$  per  $r$  infinito. (c) Una carica puntiforme positiva  $q$  è lanciata da grande distanza verso il centro della sfera. Quando  $q$  è distante possiede una energia cinetica  $K_0$ . A secondo del valore di  $K_0$  la carica attraverserà la sfera o ne sarà respinta. Determinare il valore minimo di  $K_0$  affinché la carica attraversi la distribuzione sferica di carica.



La densità volumica della sfera è  $\rho = \frac{Q}{(4/3)\pi R_0^3}$

Operiamo al solito immaginando di suddividere la sfera in infiniti gusci di spessore infinitesimi, di raggio  $r_0$  e spessore  $dr_0$ , il cui volume sarà  $dV=4\pi r_0^2 dr_0$  ogni guscio racchiude quindi una carica  $dq_0 = \rho dV = \rho 4\pi r_0^2 dr_0$  e genera un campo elettrico nullo al suo interno, mentre nei punti esterni genera un campo pari a quello generato da una uguale carica puntiforme concentrata nel centro.

Sia P un punto interno alla sfera ma esterno al guscio infinitesimo avente una distanza  $r$  dal centro tale che  $r_0 < r < R_0$ . Il campo in P dovuto al guscio è

$$d\mathbf{E} = k_e \frac{dq_0}{r^2} \mathbf{a}_r$$

e sostituendo l'espressione appena trovata per  $dq_0$

$$d\mathbf{E} = k_e \frac{dq_0}{r^2} \mathbf{a}_r = k_e \frac{\rho 4\pi r_0^2 dr_0}{r^2} \mathbf{a}_r = \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} r_0^2 dr_0 \mathbf{a}_r$$

Ora per calcolare il valore interno del campo immaginiamo tenendo fisso il punto P, perciò con  $r = \text{cost.}$  di far variare il raggio  $r_0$  del guscio, da 0 fino ad  $r$  e integrando fra questi estremi avremo il campo elettrico interno (la carica compresa nello spessore  $R_0 - r$  appartiene al guscio esterno al punto P e non contribuisce perciò al campo elettrico ivi presente).

$$\mathbf{E}_{\text{int}}(r) = \int_0^r \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} r_0^2 dr_0 \mathbf{a}_r = \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} \int_0^r r_0^2 dr_0 \mathbf{a}_r = \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} \left. \frac{r_0^3}{3} \right|_0^r \mathbf{a}_r = \frac{\rho}{\epsilon_0} r \mathbf{a}_r \quad 0 < r < R_0$$

Quindi per punti interni alla distribuzione di carica sferica il campo varia linearmente con la distanza dal centro.

Possiamo se si desidera esprimere E in funzione della carica anziché della densità, avendosi

$$\mathbf{E}_{\text{int}}(r) = k_e \frac{Q}{R_0^3} r \mathbf{a}_r \quad 0 < r < R_0 \quad \mathbf{E}_{\text{int}}(r) \propto r$$

Per calcolare E nei punti esterni alla sfera è sufficiente estendere l'estremo superiore all'integrazione fino a  $R_0$

$$\mathbf{E}_{\text{est}}(r) = \int_0^{R_0} \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} r_0^2 dr_0 \mathbf{a}_r = \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} \int_0^{R_0} r_0^2 dr_0 \mathbf{a}_r = \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} \left. \frac{r_0^3}{3} \right|_0^{R_0} \mathbf{a}_r = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2} \mathbf{a}_r \quad r > R_0$$

O in termini della carica

$$\mathbf{E}_{\text{est}}(r) = k_e \frac{Q}{r^2} \mathbf{a}_r \quad r > R_0 \quad \mathbf{E}_{\text{est}}(r) \propto \frac{1}{r^2}$$

Per punti esterni dunque il campo è identico a quello prodotto da una carica puntiforme concentrata nel centro.

(b) Per il calcolo del potenziale facciamo ricorso all'espressione, in coordinate sferiche,

$\mathbf{E}(r) = -dV/dr \mathbf{a}_r$ , integrando

$$V(r)_{\text{int}} = -\int \mathbf{E}_{\text{int}} \cdot d\mathbf{r} = -\int \frac{\rho}{3\epsilon_0} r dr = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \frac{r^2}{2} + c_1 = -\frac{\rho}{6\epsilon_0} r^2 + c_1$$

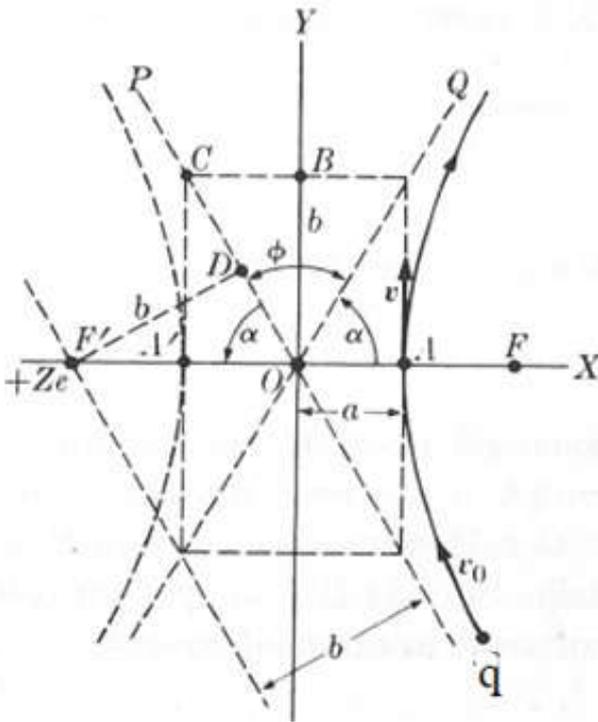
$$V(r)_{\text{est}} = -\int \mathbf{E}_{\text{est}} \cdot d\mathbf{r} = -\int \frac{\rho}{\epsilon_0 r^2} \frac{R_0^3}{3} r dr = -\int \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0} \left[ -\frac{1}{r} \right] + c_1 = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 r} + c_2$$

Per calcolare le due costanti di integrazione poniamo nullo il potenziale esterno in quanto è proporzionale a  $1/r$ , dunque tende a zero per  $r$  infinito, avendosi  $c_2 = 0$ .

Problema complementare n. 2

Calcolare la distanza di massimo avvicinamento di una particella di carica  $q$  (positiva) diretta con velocità  $v_0$  verso un atomo di numero atomico  $Z$ , avente carica positiva  $Q = Ze$ .

Nella figura seguente è mostrata la configurazione geometrica del problema.



Come noto dalla teoria, in caso di forze centrali repulsive, come in questo caso, la traiettoria della particella è una iperbole. Basta considerare che il nostro sistema è composto da due cariche con lo stesso segno, quindi con energia potenziale positiva e perciò anche con energia totale positiva  $E > 0$ , e questo determina una traiettoria iperbolica. La particella descrive un ramo di iperbole con il nucleo avente carica positiva  $Q = Ze$  situato nel fuoco lontano  $F'$ . La distanza di massimo avvicinamento è  $R = F'A$ . Si  $b = F'D$  il cosiddetto parametro d'urto. Dimosteremo innanzitutto che  $b$  è uguale al segmento  $OB$  giacente sull'asse principale dell'iperbole. L'angolo  $\phi = POQ$  tra gli asintoti è l'angolo di cui viene deviata la particella a causa della repulsione coulombiana del nucleo. La distanza  $OA = OA' = a$  individua l'asse orizzontale dell'iperbole, e dalle proprietà geometriche si ha che  $OF' = OC$ , pertanto i triangoli  $OF'D$  e  $OCA'$  sono uguali, per cui  $b = F'D = C'A' = OB$ . Dalle caratteristiche geometriche della figura si deduce che  $OF' = b \csc \alpha$  e  $OA = a = b \cot \alpha$ . Pertanto  $R = F'A = b (\csc \alpha + \cot \alpha)$ . Ma  $2\alpha + \phi = \pi$ , per cui si ha  $\alpha = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\phi$ . Pertanto

$$R = b(\sec \frac{1}{2}\varphi + \tan \frac{1}{2}\varphi) = b \frac{(1 + \csc \frac{1}{2}\varphi)}{\cot \frac{1}{2}\varphi} \quad (1)$$

Come noto (\*) dallo studio dello scattering di una particella soggetta ad una forza di tipo coulombiano  $F = k/r^2$  la relazione che esprime la deviazione angolare (angolo di scattering) in termini del parametro d'urto è

$$\cot \frac{1}{2}\varphi = \frac{mv_0^2}{k} b \quad (2)$$

Ora nel nostro caso la forza è  $F = k_e qQ/r^2$ , perciò la costante vale  $k = k_e qQ$  e la relazione diventa

$$\cot \frac{1}{2}\varphi = \frac{mv_0^2}{k_e qQ} b \text{ che inserita nella (1) ci offre}$$

$$R = k_e \frac{qQ}{2K_0} (1 + \csc \frac{1}{2}\varphi) \quad (3)$$

Che dà la distanza di massimo avvicinamento in funzione dell'angolo di scattering e dell'energia cinetica iniziale ( $K_0$ ) della particella.

Se consideriamo come caso particolare un urto frontale la particella rimbalza ed è quindi deflessa di un angolo di  $180^\circ$ , nel qual caso  $\csc \frac{1}{2}\varphi = 1$  ed R vale

$$R = k_e \frac{qQ}{K_0} \quad (4)$$

Ad es. se  $q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  e  $Q = 6e = 9.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  (atomo di carbonio) e  $K_0 = 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1 \text{ MeV}$  si ha

$$R \approx 10^{-14} \text{ m}$$

che è l'ordine di grandezza di un nucleo.

Si ricordino i seguenti ordini di grandezza

- Atomo  $\approx 10^{-10} \text{ m}$
- Nucleo  $\approx 10^{-14} \text{ m}$
- Protone  $\approx 10^{-15} \text{ m}$
- Elettrone  $< 10^{-18} \text{ m}$

# Cap. 4

## Divergenza e teorema della divergenza

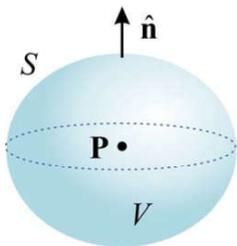
Nota introduttiva.

*Definizione di divergenza.*

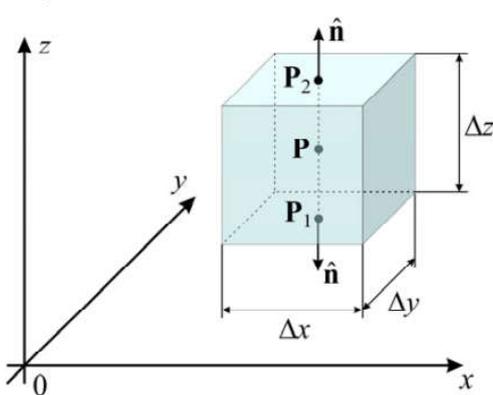
Dato un punto P contenuto in una regione in cui è definito un campo vettoriale  $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ , si considera una superficie chiusa S che delimita un volume V nell'intorno di P.

Indicando con  $\mathbf{n}$  il versore normale alla superficie S diretto verso l'esterno, si definisce divergenza di A nel punto P la seguente grandezza scalare

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{V} \quad (1)$$



Consideriamo un parallelepipedo infinitesimo di lati  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  avente facce piane e parallele agli assi e centrato nel punto P, come nella seguente figura.



Ci proponiamo di calcolare il flusso attraverso la superficie del parallelepipedo. A tal uopo consideriamo le facce 1 e 2 (centrate nei punti  $P_1$  e  $P_2$ ) che risultano parallele al piano xy, aventi superfici  $S_1$  ed  $S_2$ , allora il flusso del vettore  $\mathbf{A}$  è:

$$\int_{S_1 \cup S_2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = (A_z(P_2) - A_z(P_1)) \Delta x \Delta y = \frac{\partial A_z}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Dove, essendo il parallelepipedo infinitesimo (incremento differenziale di una funzione) vale la seguente relazione:

$$A_z(P_1) = A_z(P) - \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}$$

$$A_z(P_2) = A_z(P) + \frac{\partial A_z}{\partial z} \frac{\Delta z}{2}$$

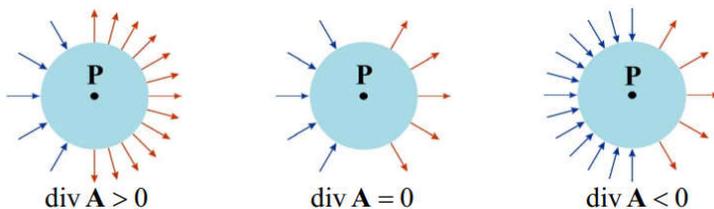
Procedendo in modo analogo con le altre due coppie di facce il flusso totale diventa:

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

La (1) diventa allora (in coordinate cartesiane):

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{\Delta x \Delta y \Delta z \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Un valore positivo della divergenza nel punto P indica che le linee di campo tendono a divergere dal punto P, ossia il flusso uscente, attraverso una superficie infinitesima nell'intorno di P, prevale su quello entrante. Un valore negativo al contrario indica che le linee di campo tendono a convergere nel punto considerato. Il flusso entrante, attraverso una superficie infinitesima nell'intorno di P, prevale su quello uscente.



In coordinate cilindriche:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

In coordinate sferiche:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(A_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

*Divergenza di  $\mathbf{D}$  (prima equazione di Maxwell)*

La legge di Gauss afferma che il flusso di  $\mathbf{D}$  è pari alla carica interna alla superficie su cui si calcola il flusso:

$$\Phi(\mathbf{D}) = q_{\text{int}} \equiv \int_V \rho dV = \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (2)$$

Per definizione la divergenza di  $\mathbf{D}$  è

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{q_{\text{int}}}{\Delta V} = \rho \quad (\text{essendo per definizione } \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{q_{\text{int}}}{\Delta V})$$

Abbiamo così ottenuto la prima equazione di Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho; \quad \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = \rho \quad (3)$$

Se la costante dielettrica è costante su tutta la regione di interesse può essere portata fuori dalla derivazione avendosi

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \varepsilon \quad (4)$$

*Teorema della divergenza*

Per qualunque campo vettoriale  $\mathbf{A}$ , il flusso, uscente da una qualunque superficie chiusa  $S$  nella regione dove il campo è definito è sempre uguale all'integrale dello scalare  $\operatorname{div} \mathbf{A}$  esteso al volume racchiuso da  $S$ .

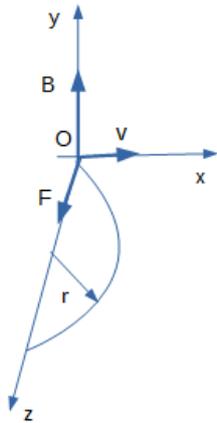
Se andiamo a sostituire la densità di carica data dalla (3) nella (2) otteniamo direttamente l'enunciato del teorema della divergenza, detto anche teorema della divergenza di Gauss, ed è un'analogia tridimensionale del teorema di Green sul piano:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{D}) dV = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

Problema complementare n. 3

Un protone avente un'energia di 30 MeV è in moto trasversalmente ad un campo magnetico  $B = 1.5$  (T). determinare (a) il raggio della traiettoria e (b) il periodo di rivoluzione.

Possiamo disegnare la situazione nel seguente modo.



$$m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$K = 30 \text{ MeV} = 4.81 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Essendo  $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  la forza è perpendicolare sia a  $\mathbf{v}$  che a  $\mathbf{B}$ , in particolare il fatto che la velocità sia perpendicolare alla forza ci dice che si tratta di una forza centripeta:

$$\mathbf{F} = qvB \mathbf{k} = (mv^2/r) \mathbf{k} \quad (1)$$

$$r = mv/qB$$

Il modulo della velocità lo possiamo ricavare dal valore noto dell'energia cinetica,

$$\frac{1}{2}mv^2 = K$$

$$v = (2K/m)^{1/2} = [2 \cdot 4.81 \cdot 10^{-12} / (1.673 \cdot 10^{-27})]^{1/2} = 7.58 \cdot 10^7 \text{ (m/s)} \quad (2)$$

Questo calcolo fatto in maniera classica lo possiamo prendere per buono in quanto ci restituisce una velocità inferiore a  $c$ , qualora invece si sarebbe ottenuto  $v > c$  sarebbe stato necessario un calcolo relativistico.

Il raggio dell'orbita circolare del protone è

$$r = mv/qB = 1.673 \cdot 10^{-27} \cdot 7.58 \cdot 10^7 / (1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.5) = 0.528 \text{ (m)}$$

Il periodo vale (essendo  $v = \omega r$ )

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi/(v/r) = \dots = 4.37 \cdot 10^{-8} \text{ (s)}$$

Se il protone fosse dotato di un'energia cinetica tale che inserita nella (2) avrebbe dato una  $v > c$ , per esempio di 30 GeV ( $4.81 \cdot 10^{-9}$  J), il calcolo andrebbe condotto per via relativistica: in  $r = mv/qB$  si deve in questo caso introdurre il valore della quantità di moto relativistica scritta in funzione dell'energia cinetica, avendosi

$$E = c (m_0^2 c^2 + p^2)^{1/2}$$

$$p = (E^2/c^2 - m_0^2 c^2)^{1/2}$$

$$E = K + m_0^2 c^2$$

$$p = \sqrt{\frac{(K + m_0^2 c^2)^2}{c^2} - m_0^2 c^2}$$

numericamente si ottiene

$$p = 1.65 \cdot 10^{-17} \text{ (kg m/s)}$$

ed inserendo questo valore nella relazione del raggio si ha

$$r = 1.65 \cdot 10^{-17} / (1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.5) = 68.7 \text{ (m)}$$

Per il periodo riscriviamo la relazione (1) nel seguente modo

$$qvB = m\omega^2 r$$

$$q\omega r B = m\omega^2 r$$

$$\omega = (q/m) B$$

$$\text{quindi } T = 2\pi/\omega = 2\pi m/qB$$

solo che ora bisogna considerare la massa relativistica

$$m = K/c^2 + m_0 = (4.81 \cdot 10^{-9} / 9 \cdot 10^{16}) + 1.673 \cdot 10^{-27} = 55 \cdot 10^{-27} \text{ (kg)}$$

$$T = 2\pi m/qB = 2\pi 55 \cdot 10^{-27} / (1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 1.5) = 1.44 \cdot 10^{-6} \text{ (s)}$$

Come si vede questo valore è circa 300 volte superiore a quello ottenuto in via classica.

14.26) Un'onda elettromagnetica nel vuoto ha una costante di sfasamento pari a 0.524 (rad/m), che diventa 1.81 (rad/m) quando l'onda penetra in un dielettrico perfetto. Assumendo  $\mu_r = 1$  trovare  $\epsilon_r$  e la velocità di propagazione.

Si tratta come prima di “giostrare” con le relazioni note.

Per il dielettrico perfetto vale  $\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$ , allora essendo  $\omega_{\text{vuoto}} = \omega_{\text{die}} \equiv \omega$

$$\beta_{\text{vuoto}} = \omega / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 0.524 / (33.3 \cdot 10^{-10}) = 1.57 \cdot 10^8 \text{ (rad/m)}$$

$$\beta_{\text{die}} = 0.524 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

$$\omega = 0.524 / \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 0.524 / (33.3 \cdot 10^{-10}) = 1.6 \cdot 10^8 \text{ (rad/s)}$$

$$\beta_{\text{vuoto}} = \omega (\mu_0 \epsilon_0)^{1/2} (\epsilon_r)^{1/2} = 1.81$$

$$\epsilon_r = [1.81 / \omega (\mu_0 \epsilon_0)^{1/2}]^2 = 11.9$$

$$v_{\text{die}} = \omega / \beta_{\text{die}} = 1.57 \cdot 10^8 / 1.81 = 8.67 \cdot 10^7 \text{ (m/s)}$$

14.27) Trovare la costante di propagazione a 400 MHz per un mezzo nel quale  $\epsilon_r = 16$ ,  $\mu_r = 4.5$  e  $\sigma = 0.6$  (S/m). Trovare il rapporto  $v/c$ , tra velocità nel mezzo e nel vuoto.

Si ha (con  $\omega = 2\pi \nu = 2\pi \cdot 400 \cdot 10^6 = 2.51 \cdot 10^9$  (rad/s))

$$\alpha = 2.51 \cdot 10^9 \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 16}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{0.6}{2.51 \cdot 10^9 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 16}} - 1 \right)} = 48.9 \text{ (Np / m)}$$

$$\beta = 2.51 \cdot 10^9 \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 15}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{0.6}{2.51 \cdot 10^9 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 16}} + 1 \right)} = 86 \text{ (rad / m)}$$

$\gamma = 48.9 + j 86$  il cui modulo e angolo sono:

$$|\gamma| = (48.9^2 + 86^2)^{1/2} = 99 \text{ (m}^{-1}\text{)}$$

$$\theta = \arctan \beta / \alpha = 60.37^\circ$$

$$v = \omega / \beta = 2.5 \cdot 10^9 / 86 = 2.9 \cdot 10^7 \text{ (m/s)}$$

Allora il rapporto fra le velocità è

$$v/c = 2.9 \cdot 10^7 / (3 \cdot 10^8) = 0.097$$

$$v \approx 10\% c$$

14.28) In un mezzo parzialmente conduttore,  $\epsilon_r = 18.5$ ,  $\mu_r = 800$  e  $\sigma = 1$  (S/m). Trovare  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  e la velocità nel mezzo per una frequenza di  $10^9$  Hz. Calcolare anche  $\mathbf{H}(z,t)$  conoscendo  $\mathbf{E}(z,t) = 50.0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{j}$  (V/m).

Si ha (con  $\omega = 2\pi \nu = 2\pi \cdot 10^9 = 6.28 \cdot 10^9$  (rad/s))

$$\alpha = 6.28 \cdot 10^9 \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 18.5}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{1}{6.28 \cdot 10^9 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 18.5} \right)^2} - 1 \right)} = 1.13 \text{ (Np / m)}$$

$$\beta = 6.28 \cdot 10^9 \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 18.5}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{1}{6.28 \cdot 10^9 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 18.5} \right)^2} + 1 \right)} = 2787 \text{ (rad / m)}$$

L'impedenza intrinseca vale

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon}}$$

possiamo considerare la sua radice quadrata in forma polare con  $0^\circ < \theta < 45^\circ$  avendosi

$$|\eta| = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt[4]{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2}} = \frac{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 800 / 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 18.5}}{\sqrt[4]{1 + \left( \frac{1}{6.28 \cdot 10^9 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 18.5} \right)^2}} = 2097 \text{ (}\Omega\text{)}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 0.9726$$

$$\theta = 22.1^\circ$$

La velocità dell'onda vale

$$v = \omega/\beta = 2.25 \cdot 10^6 \text{ (m/s)}$$

$$\mathbf{H} = (E_0/|\eta|) e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z - \theta)} = (50/2097) e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z - \theta)} = 0.0238 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - 0.386) \mathbf{j}$$

In generale si ha

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{i}; \quad \mathbf{H} = (E_0/|\eta|) e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z - \theta)} \mathbf{j}$$

14.29) Per l'argento,  $\sigma=3.0$  (MS/m). A quale frequenza lo spessore di penetrazione  $\delta$  sarà di 1 mm?

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}}$$

$$\nu = \frac{1}{\pi\mu\sigma\delta^2} = \frac{1}{\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}} = 84.4 \text{ (kHz)}$$

14.30) Trovare la frequenza per la quale la costante di sfasamento del rame  $-\sigma = 58.0$  (MS/m)- è di  $3.71 \cdot 10^5$  (rad/m).

Essendo  $\delta^{-1} = \beta$ , utilizzando la relazione precedente abbiamo

$$\nu = \frac{\beta^2}{\pi\mu\sigma} = \frac{(3.7 \cdot 10^5)^2}{\pi \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 58 \cdot 10^6} = 600 \text{ (MHz)}$$

14.31) Subito dentro un liquido l'ampiezza di  $\mathbf{E}$  è di 10.0 (V/m), e le costanti sono:  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 20$  e  $\sigma = 0.50$  (S/m). Determinare l'ampiezza di  $\mathbf{E}$  a 10 cm all'interno del mezzo, per frequenze di (a) 5 MHz, (b) 50 MHz e (c) 500 MHz.

Si ha (con  $\omega_1 = 2\pi \nu_1 = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^6 = 31.4 \cdot 10^6$ ;  $\omega_2 = 314 \cdot 10^6$ ;  $\omega_3 = 3140 \cdot 10^6$  )

$$\alpha_1 = 31.4 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 1 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 20}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{0.50}{31.4 \cdot 10^6 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 20} \right)^2} - 1 \right)} = 3.12 \text{ (Np/m)}$$

$E_1 = E_0 e^{-\alpha_1 z} = 10 e^{-3.12 \cdot 0.1} = 7.32 \text{ (V/m)}$  e con gli altri due valori della frequenza si ha

$$E_2 = 3.91 \text{ (V/m)}$$

$$E_3 = 1.42 \text{ (V/m)}$$

14.32) Abbiamo nel vuoto  $\mathbf{E}(z,t) = 1.0 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{i}$  (V/m). Dimostrare che la potenza media che attraversa un disco di raggio 15.5 m, in un piano  $z = \text{cost.}$ , è di 1 W.

$$\mathbf{H} = (E_0/|\eta_0|) e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{j} = (1/120\pi) e^{j(\omega t - \beta z)} \mathbf{j} \quad (\text{essendo } |\eta_0| = 120 \pi)$$

La potenza media dell'onda è

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \quad \text{dove } \mathbf{H}^* \text{ è il complesso coniugato di } \mathbf{H}$$

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} = \frac{1}{2} E_0 H_0 \mathbf{k} = \frac{1}{2} 1.0 (1/120\pi) \mathbf{k} = 0.0013 \mathbf{k} \text{ (W/m}^2\text{)}$$

Il flusso normale all'area è

$$\mathbf{P}_{\text{ave}} \cdot \mathbf{S} = 0.0013 \pi R^2 = 0.0013 \pi (15.5)^2 = 1 \text{ W}$$

14.33) In coordinate sferiche si ha la seguente onda sferica:

$$\mathbf{E} = (100/r) \sin \theta \cos(\omega t - \beta r) \mathbf{a}_\theta \text{ (V/m); } \mathbf{H} = (0.265/r) \sin \theta \cos(\omega t - \beta r) \mathbf{a}_\phi \text{ (A/m)}$$

che rappresenta il campo elettromagnetico a grandi distanze  $r$  da un'antenna a dipolo nel vuoto.

Trovare la potenza media che attraversa il guscio emisferico  $r = 1 \text{ km}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Tenendo conto che  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $d\mathbf{S}$  sono ortogonali fra loro si ha che il flusso istantaneo di energia per unità di superficie in un determinato punto vale

$$\begin{aligned} P_{\text{ave}} &= \int \mathbf{P}_{\text{ave}} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{100}{r} \frac{0.265}{r} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta d\phi = \\ &= \frac{13.25}{1000} \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = 0.0832 \left[ -\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2} = 55.5 \text{ (W)} \end{aligned}$$

La dipendenza temporale è la medesima per  $\mathbf{H}$  ed  $\mathbf{E}$ .

14.34) Nel vuoto si abbia  $E(z,t) = 150 \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{i}$  (V/m). Trovare la potenza complessiva che attraversa una superficie rettangolare di lati 30 mm e 15 mm, nel piano  $z = 0$ .

$$\mathbf{H} = (E_0/|\eta_0|) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{j} = (150/120\pi) \sin(\omega t - \beta z) \mathbf{j}$$

$$P_{\text{ave}} = \frac{1}{2} |(\mathbf{E} \times \mathbf{H})| = \frac{1}{2} (150) (150/120\pi) = 29.86 \text{ (W/m}^2\text{)}$$

La potenza complessiva sulla superficie è

$$P_{\text{ave}} = P_{\text{ave}} S = 29.86 (30 \cdot 15) \cdot 10^{-6} = 0.0134 \text{ (W)}$$

14.35) Un'interfaccia vuoto-argento ha  $E_0^i = 100$  (V/m) dalla parte del vuoto. La frequenza è di 15 MHz, le costanti dell'argento sono  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 1$  e  $\sigma = 61.7$  (MS/m). Determinare  $E_0^r$  e  $E_0^t$  sull'interfaccia.

$$\omega = 2\pi \nu = 2\pi 15 \cdot 10^6 = 94.2 \cdot 10^6 \text{ (rad/s)}$$

Basta utilizzare le formule del caso.

$$E_i^t = E_0^i \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = E_0^i \frac{2\eta_2}{\eta_0 + \eta_2}$$

$$|\eta_0| = 120 \pi$$

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{94.2 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{61.7 \cdot 10^6}} = 13.85 \cdot 10^{-4}$$

$$E_i^t = 100 \frac{2 \cdot 13.85 \cdot 10^{-4}}{120\pi + 13.85 \cdot 10^{-4}} = 7.35 \cdot 10^{-4} \text{ (V/m)}$$

$$E_i^r = E_0^i \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = 100 \frac{-\eta_1}{\eta_1} = -100 \text{ (V/m)} \text{ (trascurando } \eta_2\text{)}$$

$\theta < 45^\circ$  come per tutti i conduttori.

14.36) Un'interfaccia vuoto-conduttore presenta, dalla parte del vuoto,  $H_0^i = 1.0$  (A/m); la frequenza è di 31.8 MHz, le costanti del conduttore sono  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 1$  e  $\sigma = 1.26$  (MS/m). Trovare  $H_0^r$ ,  $H_0^t$  nonché la profondità di penetrazione di  $H_0^t$ .

$$\omega = 2\pi \nu = 2\pi \cdot 31.8 \cdot 10^6 = 199.7 \cdot 10^6 \text{ (rad/s)}$$

$$H_0^t = H_0^i \frac{2\eta_1}{\eta_1 + \eta_2} = 1.0 \frac{2 \cdot 120\pi}{120\pi + 14.1 \cdot 10^{-3}} = 2.0 \text{ (A/m)}$$

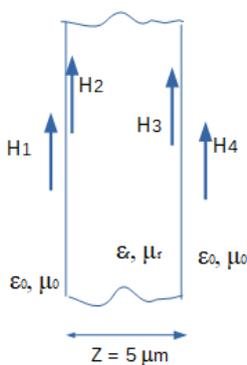
essendo

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{199.7 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{1.26 \cdot 10^6}} = 14.1 \cdot 10^{-3}$$

$$H_0^r = H_0^i \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = 1.0 \frac{120\pi - 14.1 \cdot 10^{-3}}{120\pi + 14.1 \cdot 10^{-3}} = 1.0 \text{ (A/m)} \text{ (avendo trascurato } \eta_2)$$

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu\mu\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot 31.8 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 1.26 \cdot 10^6}} = 80 \text{ } (\mu\text{m})$$

14.37) Un campo  $\mathbf{H}$ , che viaggia nel vuoto con ampiezza 1.0 (A/m) e frequenza 200 MHz, colpisce come nella figura, un foglio d'argento ( $\sigma = 61.7$  MS/m) dello spessore di  $5 \mu\text{m}$ . Trovare  $H_0^t$  subito al di là del foglio.



Dati

$$H_1 = 1.0 \text{ (A/m)}$$

$$\nu = 200 \text{ (MHz)}$$

$$\omega = 2\pi \nu = 1.256 \cdot 10^9 \text{ (rad/s)}$$

$$\sigma = 61.7 \cdot 10^6 \text{ (S/m)}$$

$$|\eta_0| = 120 \pi = 377 \text{ } (\Omega)$$

$$\eta_{\text{int}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} = \sqrt{\frac{1.256 \cdot 10^9 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}{61.7 \cdot 10^6}} = 5.06 \cdot 10^{-3} \text{ } (\Omega)$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$H_2 = H_1 \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_{\text{int}}} = 1.0 \frac{2 \cdot 377}{377 + 5 \cdot 10^{-3}} = 2.0 \text{ (A/m)}$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi \nu \mu \sigma} = \sqrt{\pi \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 4\pi \cdot 61.7 \cdot 10^6} = 2.21 \cdot 10^5$$

$$H_3 = H_2 e^{-\alpha z} = 2.0 e^{-2.21 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 0.665 \text{ (A/m)}$$

$$H_4 = H_3 \frac{2\eta_{\text{int}}}{\eta_0 + \eta_{\text{int}}} = 0.665 \frac{2 \cdot 5.06 \cdot 10^{-3}}{377 + 5.06 \cdot 10^{-3}} = 1.78 \cdot 10^{-5} \text{ (A/m)}$$

$$H_1 = 1.0 \text{ (A/m)}$$

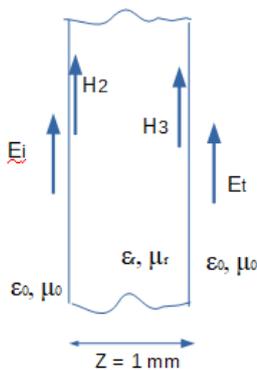
$$H_2 = 2.0 \text{ (A/m)}$$

$$H_3 = 0.6 \text{ /A/m}$$

$$H_4 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ (A/m)}$$

Il campo H dall'altra parte del foglio è circa 2/100 000 del campo incidente.

14.38) Un campo  $E$ , che viaggia nello spazio con un'ampiezza di 100 (V/m), colpisce un dielettrico perfetto come in figura, le costanti sono: sono  $\mu_r = 1$ ,  $\epsilon_r = 20$  e  $\sigma = 0$  (MS/m).. Trovare  $E_0^t$ .



$$E_2 = E_1 \frac{2\eta_{\text{int}}}{\eta_0 + \eta_{\text{int}}} = 100 \frac{2 \cdot 84}{377 + 84} = 36.44 \text{ (V/m)}$$

ricordando che per un dielettrico la costante  $\eta$  vale  $\eta_{\text{int}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  si ha

$$\eta_{\text{int}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 20}} = 84 \text{ e } \theta = 0^\circ$$

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi\nu\mu\sigma} = 0$$

essendo  $\sigma = 0$

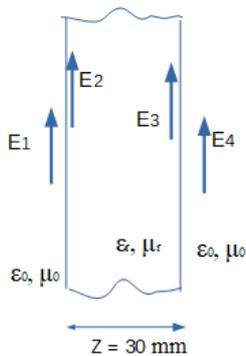
quindi non c'è attenuazione né sfasamento del campo elettrico.

$$E_3 = E_2 e^{-\alpha z} = 36.44 e^{-0} = 36.44 (V/m)$$

$$E_4 = E_3 \frac{2\eta_{\text{int}}}{\eta_0 + \eta_{\text{int}}} = 36.44 \frac{2 \cdot 377}{377 + 84} = 59.6 (V/m)$$

Si noti come l'ampiezza dell'onda e.m. che esce dal foglio dielettrico perfetto è indipendente dallo spessore.

14.39) Un campo  $E$ , che viaggia nel vuoto colpisce un mezzo parzialmente conduttore, come in figura. Assegnata una frequenza di 500 MHz ed una  $E_0^i = 100 (V/m)$ , trovare  $E_0^t$  ed  $H_0^t$ .



Dati

$$\mu_r = 1, \epsilon_r = 55; \quad \sigma = 1 (S/m), \quad z = 1 \text{ mm},$$

$$\nu = 500 \text{ MHz}$$

$$\omega = 2\pi \nu = 3.14 \cdot 10^9 \text{ (rad/s)}$$

$$E_1 = 100 (V/m)$$

$$E_2 = E_1 \frac{2\eta_{\text{int}}}{\eta_0 + \eta_{\text{int}}} = 100 \frac{2 \cdot 46.47}{377 + 46.47} = 21.95 (V/m)$$

Dove per un materiale parzialmente conduttivo si ha

$$\eta = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt[4]{1 + (\sigma/\omega\epsilon)^2}} = \frac{\sqrt{4\pi \cdot 10^{-7} / 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 55}}{\sqrt[4]{1 + (1 / (3.14 \cdot 10^9 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 22))^2}} = 46.47$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right)} = \dots = 24.24$$

$$E_3 = E_2 e^{-\alpha z} = 21.95 e^{-24.24 \cdot 30 \cdot 10^{-3}} = 10.63 (V/m)$$

$$E_4 = E_3 \frac{2\eta_0}{\eta_0 + \eta_{\text{int}}} = 10.63 \frac{2 \cdot 377}{377 + 46.47} = 19 \text{ (V / m)}$$

$$E_1 = 100 \text{ (V/m)}$$

$$E_2 = 22 \text{ (V/m)}$$

$$E_3 = 10 \text{ (V/m)}$$

$$E_4 = 19 \text{ (V/m)}$$

Il campo magnetico trasmesso si può calcolare dalla relazione  $H_t = E_t/\eta_2$  essendo in questo caso

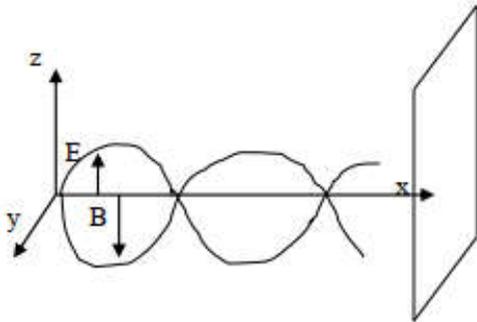
$\eta_2 = \eta_0$  si ha

$$H_4 = E_4 / \eta_0 = 19/377 = 0.0504 \text{ (A/m)}$$

Problema complementare n. 1

Un' onda elettromagnetica sinusoidale di intensità  $I$  incide perpendicolarmente su una superficie metallica. Ricordando che il campo elettrico in prossimità di un buon conduttore è normale alla superficie, determina in tali punti:

- il campo elettrico dell'onda riflessa;
- il modulo e la direzione del campo magnetico;
- la densità di energia elettromagnetica in media nel tempo.



$E$  oscilla nel piano  $xz$

$B$  oscilla nel piano  $yz$

$I$  è l'intensità dell'onda incidente

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2 = \frac{1}{2} c^3 \epsilon_0 B_0^2$$

(essendo  $E_0 = c B_0$ )

La discussione di tale problema è complesso e a tal uopo si rimanda alle seguenti fonti:

Collana Schaum's: "Elettromagnetismo" pag. 182 e seguenti

Alonso – Finn "Elementi di fisica per l'università" vol.2, pag. 808

Silvestrini "Fisica II", pag 467

- Proprio dal Silvestrini prendiamo le espressioni dei campi  $E$  e  $H$  riflessi:

$$B = \mu H$$

$$E/H = Z = \sqrt{\mu/\epsilon}$$

$$\text{onda incidente} \quad E_i = E_{(+)} \exp(j(kz - \omega t)) \quad B_i = (E_{(+)} / Z) \exp(j(kz - \omega t))$$

$$\text{onda riflessa} \quad E_r = 2 E_{(+)} (\sin kz) \sin \omega t \quad H_r = 2 (E_{(+)} / Z) (\cos kz) \cos \omega t$$

( $z = 0$  è il piano del conduttore)

$$\text{in } z = 0 \text{ si ha: } E_r = 0 \quad H_r = 2 H_y \quad \text{ossia } B_r = 2 B_0$$

(si ricordi che  $I = \frac{1}{2} c^3 \epsilon_0 B_0^2$  e quindi si ha  $B_0 = (2I / c^3 \epsilon_0)^{1/2}$ )

$$\text{b) } B_r = 2(2I / c^3 \epsilon_0)^{1/2} = (2/c) (2I / c \epsilon_0)^{1/2}$$